۱) جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$، کدام است؟ سراسری- ۱۳۹۶

۱) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
۲) $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$
۳) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
۴) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۲) جواب کلّی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin 2x}{1 + \cos x} = 0$، کدام است؟ خارج از کشور- ۱۳۹۷

۱) $x = \frac{k\pi}{5}$
۲) $x = \frac{2k\pi}{5}$
۳) $x = k\pi + \frac{\pi}{5}$
۴) $x = \frac{(2k+1)\pi}{5}$

۳) مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$، در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟ خارج از کشور- ۱۳۹۶

۱) $\frac{14\pi}{3}$
۲) 4π
۳) $\frac{9\pi}{2}$
۴) 5π

۴) جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$ ، کدام است؟ سراسری- ۱۳۹۵

۱) $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$
۲) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
۳) $x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$
۴) $x = k\pi - \frac{\pi}{3}$

۵) نمودار تابع $y = 3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ روی بازه‌ی $\left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ در چند نقطه محور xها را قطع می‌کند؟ خارج از کشور- ۱۳۹۱

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۶ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{\sin ۳x}{\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+x\right)}=۱$ به کدام صورت است؟ خارج از کشور- ۱۳۹۳

۱) $x=k\pi+\frac{\pi}{۴}$ ۲) $x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۴}$ ۳) $x=۲k\pi\pm\frac{۳\pi}{۴}$ ۴) $x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$

۷ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin^۲ x-\cos^۲ x=\sin(\frac{۳\pi}{۲}+x)$، به کدام صورت است؟

سراسری- ۱۳۹۱

۱) $x=\frac{k\pi}{۳}$ ۲) $x=\frac{۲k\pi}{۳}$ ۳) $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}$ ۴) $x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$

۸ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin(\pi+x)\cos(\frac{\pi}{۲}+x)-۲\sin(\pi-x)+۱=۰$ کدام است؟

سراسری- ۱۳۹۰

۱) $x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۲}$ ۲) $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}$ ۳) $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ ۴) $x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$

۹ مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^۴ x+\cos^۴ x=\frac{۱}{۲}$، در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، کدام است؟

خارج از کشور- ۱۳۹۸

۱) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۲) ۳π ۳) $\frac{۷\pi}{۲}$ ۴) ۴π

۱۰ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $۲\cos^۲ x=۳\cos(\frac{\pi}{۲}+x)$ کدام است؟ سنجش- ۱۳۹۴

۱) $x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}$, $x=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶}$ ۲) $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\pm\frac{\pi}{۳}$

۳) $x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$ ۴) $x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$

۱۱ مجموع جواب‌های معادله‌ی $۲(\sin^۴ x-\cos^۴ x)=۱$ در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

سنجش- ۱۳۹۴

۱) ۳π ۲) ۴π ۳) ۵π ۴) $\frac{۱۰\pi}{۳}$

۱۲ معادلهٔ $\sin^{2} x + \cos^{2} 3x = 1$ دربازهٔ $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟ قلم چی- ۱۳۹۸

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۳ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^{6} x + \cos^{6} x = 1$ کدام است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $x = \frac{2k\pi}{3}$ ۲) $x = k\pi$ ۳) $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$ ۴) $x = \frac{k\pi}{2}$

۱۴ مجموعه جواب معادلهٔ مثلثاتی $2\sin^{2} x = \sin x$، نمایانگر رأس‌های کدام شکل روی دایرهٔ مثلثاتی است؟ قلم چی- ۱۳۹۹

۱) متوازی‌الاضلاع ۲) پاره‌خط ۳) ذوزنقه ۴) مربع

۱۵ معادلهٔ مثلثاتی $(1 + 3\cos x)(1 + 3\sin x) = 0$ در بازهٔ $[0, \frac{3\pi}{2}]$، چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ قلم چی- ۱۳۹۹

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ ۲ **۳** ۴ می‌دانیم: $\boxed{1+\cos 2a = 2\cos^2 a}$

$$\cos 2x + 2\cos^2 x = 0 \to \cos 2x + 1 + \cos 2x = 0 \to 2\cos 2x = -1 \to \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\to \cos 2x = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi\pm\alpha} 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \to x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۲ ۱ **۲** ۳ ۴ کسری برابر صفر است که صورتش صفر باشد.

$$\sin 3x + \sin 2x = 0 \to \sin 3x = -\sin 2x \to \sin 3x = \sin(-2x)$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{x=2k\pi+\alpha} 3x = 2k\pi - 2x \to 5x = 2k\pi \to x = \dfrac{2k\pi}{5} \\ \xrightarrow{x=2k\pi+\pi-\alpha} 3x = 2k\pi + \pi + 2x \to x = 2k\pi + \pi \ \ \text{(مخرج را صفر می‌کند) غقق} \end{cases}$$

۳ ۱ ۲ ۳ **۴** می‌دانیم: $\boxed{\sin 2a = 2\sin a\cos a \ , \ \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha}$

$$\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0 \to 2\sin x\cos x + \sin x = 0 \to \sin x(2\cos x + 1) = 0$$

$$\to \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \xrightarrow{k=0,1,2} x = 0, \pi, 2\pi \\ 2\cos x + 1 = 0 \to \cos x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi\pm\alpha} \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{2\pi}{3} \xrightarrow{k=0} x = \dfrac{2\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \dfrac{2\pi}{3} \xrightarrow{k=1} x = \dfrac{4\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر $0 + \pi + 2\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 5\pi$ است.

۴ **۱** ۲ ۳ ۴

$$2\sin^2 x + 3\cos x = 0 \to 2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 0$$

$$\to 2 - 2\cos^2 x + 3\cos x = 0 \to 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 - 3A - 2 = 0 \to \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25$$

$$\to \begin{cases} \cos x = \dfrac{3+5}{4} = 2 \to (-1 \le \cos x \le 1) \ \ \text{امکان ندارد} \\ \cos x = \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi\pm\alpha} x = 2k\pi \pm \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۵ ۱ ۲ ۳ **۴** برای پیدا کردن نقاط برخورد نمودار تابع $y = 3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ با محور xها روی بازه‌ی $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$، کافی است معادله‌ی $3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0$ را روی بازه‌ی مورد نظر حل کنیم. داریم:

$$3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0$$

$$\xrightarrow[x=k\pi]{\text{حالت خاص}} \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \Rightarrow -2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} - \frac{k\pi}{2}$$

حال، جواب‌های قابل قبول x را که در بازه‌ی $[-\pi, \frac{3\pi}{2}]$ قرار دارند به دست می‌آوریم:

$$k=2 \Rightarrow x=\frac{\pi}{8}-\pi=-\frac{7\pi}{8} \quad , \quad k=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{2}=-\frac{3\pi}{8}$$

$$k=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{8} \quad , \quad k=-1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{8}$$

$$k=-2 \Rightarrow x=\frac{\pi}{8}+\pi=\frac{9\pi}{8}$$

در نتیجه، پنج جواب قابل قبول وجود دارد.

۶ ① ② ③ **④**

$$\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2}+x)}=1 \rightarrow \frac{\sin 3x}{\sin x}=1 \xrightarrow{\sin x\neq 0 \rightarrow x\neq k\pi} \sin 3x=\sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=2k\pi+\alpha} 3x=2k\pi+x \rightarrow 2x=2k\pi \rightarrow x=k\pi \\ \xrightarrow{x=2k\pi+\pi-\alpha} 3x=2k\pi+\pi-x \rightarrow 4x=2k\pi+\pi \rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

چون $x\neq k\pi$ می‌باشد پس جواب $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ است.

۷ ① **②** ③ ④

می‌دانیم: $\boxed{\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a}$

$$\sin^2 x-\cos^2 x=\sin(\frac{3\pi}{2}+x) \Rightarrow -\cos 2x=-\cos x \Rightarrow \cos 2x=\cos x$$

$$\xrightarrow{x=2k\pi\pm\alpha} 2x=2k\pi\pm x \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi \\ \text{یا} \\ x=\frac{2k\pi}{3} \end{cases} \rightarrow \quad x=\frac{2k\pi}{3}$$

$x=\frac{2k\pi}{3}$ جواب‌های $x=2k\pi$ را پوشش می‌دهد.

۸ ① ② **③** ④

$$\sin(\pi+x)\cos(\frac{\pi}{2}+x)-2\sin(\pi-x)+1=0 \Rightarrow (-\sin x)(-\sin x)-2\sin x+1=0$$

$$\Rightarrow \sin^2 x-2\sin x+1=0 \Rightarrow (\sin x-1)^2=0 \Rightarrow \sin x=1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

۹ ① ② ③ **④** می‌دانیم $\sin^4 a+\cos^4 a=1-\frac{1}{2}\sin^2 2a$ است.

$$1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 2x=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2x=1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4} \\ \sin 2x=-1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x=2k\pi-\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جواب‌ها}=\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}=\frac{16\pi}{4}=4\pi$$

۱۰ ۴ ۳ ۲ **۱**

$2\cos^2 x = 3\cos(\frac{\pi}{2}+x) \to 2\cos^2 x = -3\sin x$

$\to 2(1-\sin^2 x) = -3\sin x \to 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0 \xrightarrow{\sin x = A} 2A^2 - 3A - 2 = 0 \to \Delta = 9 + 16 = 25$

$$\to \begin{cases} A = \frac{3+5}{4} = 2 \to \sin x = 2 \quad : \text{امکان ندارد} \quad (-1 \le \sin x \le 1) \\ A = \frac{3-5}{4} = \frac{-1}{2} \to \sin x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \to \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \to x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \to x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

۱۱ ۴ ۳ **۲** ۱ می‌دانیم: $\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a}$

$2(\sin^4 x - \cos^4 x) = 1 \to 2\underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1}(\sin^2 x - \cos^2 x) = 1$

$\to 2(-\cos 2x) = 1 \to \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=2k\pi+\alpha} 2x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \to x = k\pi + \frac{\pi}{3} \\ \xrightarrow{x=2k\pi-\alpha} 2x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \to x = k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

k	x
0	$\frac{\pi}{3}$, $\cancel{-\frac{\pi}{3}}$
1	$\frac{4\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$
2	$\cancel{\frac{7\pi}{3}}$, $\frac{5\pi}{3}$

$\to$ مجموع جواب‌ها $= \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} = 4\pi$

۱۲ ۴ **۳** ۲ ۱ توجه کنید اگر $\sin^2 x = \sin^2 \alpha$ باشد آنگاه $x = k\pi \pm \alpha$ است.

$\sin^2 x + \cos^2 3x = 1 \longrightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 3x \longrightarrow \sin^2 3x = \sin^2 x$

$$\longrightarrow 3x = k\pi \pm x \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{k\pi}{4} \end{cases}$$

این معادله پنج جواب $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ در بازهٔ داده‌شده دارد.

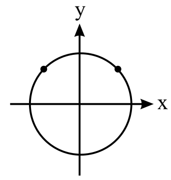
۱۳ **۴** ۳ ۲ ۱ می‌دانیم $\sin^6 a + \cos^6 a = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2a$ است.

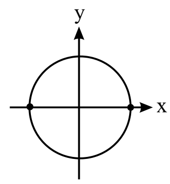
$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 \to 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 \to -\frac{3}{4}\sin^2 2x = 0$

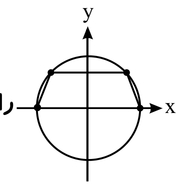
$\to \sin^2 2x = 0 \to \sin 2x = 0 \xrightarrow{\sin x = 0 \to x = k\pi} 2x = k\pi \to x = \frac{k\pi}{2}$

۱۴ ۱ ۲ **۳** ۴

$$۲\sin^۲ x=\sin x \Rightarrow ۲\sin^۲ x-\sin x=۰ \Rightarrow \sin x(۲\sin x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \\ \sin x=۰ \Rightarrow \end{cases}$$



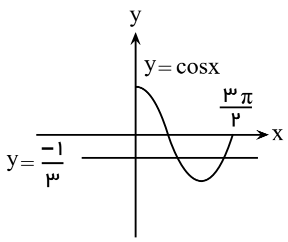


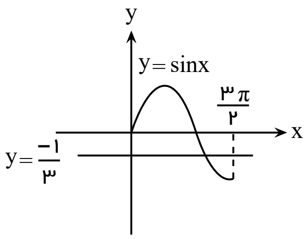
پس در مجموع  را داریم که یک ذوزنقه تشکیل می‌شود.

۱۵ ۱ ۲ **۳** ۴

$$(۱+۳\cos x)(۱+۳\sin x)=۰ \Rightarrow \begin{cases} ۱+۳\cos x=۰ \Rightarrow \cos x=-\frac{۱}{۳} \\ ۱+۳\sin x=۰ \Rightarrow \sin x=-\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

با رسم نمودارهای $y=\sin x$ و $y=\cos x$ در بازهٔ $[۰,\frac{۳\pi}{۴}]$، مشخص می‌شود که خط $y=\frac{-۱}{۳}$ در دو نقطه نمودار $y=\cos x$ را قطع می‌کند و نمودار $y=\sin x$ را در یک نقطه قطع می‌کند، پس معادله در این فاصله، سه ریشه دارد.





پاسخنامه کلیدی

۱	۳
۲	۲
۳	۴
۴	۱
۵	۴
۶	۴
۷	۲
۸	۳
۹	۴
۱۰	۱
۱۱	۲
۱۲	۳
۱۳	۴
۱۴	۳
۱۵	۳